

ФУНКЦИЯЛАРНИ ҲОСИЛАЛАР ЁРДАМИДА ТЕКШИРИШ

1- §. Биринчи тартибли ҳосила ёрдамида функцияларнинг экстремумларини текшириш

4.1.1. Агар (a, b) ораликнинг $x_2 > x_1$ тенгсизликини каноатлантирувчи иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 нукталари учун $f(x_2) > f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция (a, b) ораликда *ўсувчи* дейилади.

Агар (a, b) ораликнинг $x_2 > x_1$ тенгсизликини каноатлантирувчи иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 нукталари учун $f(x_2) < f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция (a, b) ораликда *камаювчи* дейилади.

Ораликда ўсувчи ёки камаювчи функциялар *монотон функциялар* дейилади.

Монотонликнинг зарурий шартлари:

1. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция ўсувчи бўлса, у ҳолда $f'(x) > 0$.

2. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция камаювчи бўлса, у ҳолда $f'(x) < 0$.

Монотонликнинг етарлилик шартлари.

1. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция мусбат ҳосилага эга бўлса, яъни $f'(x) > 0$, у ҳолда функция шу ораликда *ўсувчи функция* бўлади.

2. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция манфий ҳосилага эга бўлса, яъни $f'(x) < 0$, функция шу ораликда *камаювчи функция* бўлади.

Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи нолга тенг ёки узилишга эга бўладиган нукталари *критик нуқталар* дейилади.

Энг содда ҳолларда $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини чекли сондаги критик нуқталар билан чегараланган монотонлик ораликларга бўлиш мумкин.

4.1.2. Агар x_0 нуктанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг ҳар қандай $x \neq x_0$ нуктаси учун $f(x) < f(x_0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция x_0 нуктада *максимумга эришади* дейилади.

Агар x_0 нуктанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг ҳар қандай $x \neq x_0$ нуктаси учун $f(x) > f(x_0)$ тенгсиз-

лик ўринли бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ функция x_0 нуктада *минимумга эришади* дейилади.

Функция максимум ёки минимумга эришадиган нукталар унинг *экстремум* нукталари дейилади. Функциянинг экстремум нукталаридаги қийматлари функциянинг *экстремал* (*максимал* ёки *минимал*) *қийматлари* дейилади.

Экстремумнинг зарурий шарти. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуктада экстремумга эга бўлса, у ҳолда $f'(x_0)$ нолга тенг ёки мавжуд бўлмайди.

Аммо ҳар қандай критик нукта ҳам экстремум нуктаси бўлавермайди.

Экстремумнинг етарлилик шарти. Агар x_0 нукта $y=f(x)$ функциянинг критик нуктаси бўлиб, функциянинг ҳосиласи бу нуктадан ўтишда ишорасини *ўзгартирса*, у ҳолда x_0 — бу функциянинг *экстремум нуктаси* бўлади, шу билан бирга:

1. Агар x_0 нуктадан чапдан ўнгга ўтишда $f'(x)$ ўз ишорасини мусбатдан манфийга ўзгартирса, у ҳолда x_0 нуктада функция максимумга эришади.

2. Агар x_0 нуктадан чапдан ўнгга ўтишда $f'(x)$ ўз ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартирса, у ҳолда x_0 нуктада функция минимумга эришади.

Шундай қилиб, монотонлик ораликларини ва функция экстремумини топиш учун олдин функциянинг аниқланиш соҳасини критик нукталар ёрдамида монотонлик ораликларига бўлиш ва уларда ҳосила ишорасини текшириш керак.

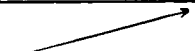
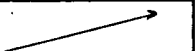
Шундан кейин монотонлик ва экстремумнинг етарлилик шартларидан фойдаланиб, ўсиш ва камайиш ораликларини, максимум ва минимум нукталарини топиш ҳамда функциянинг бу нукталардаги қийматларини ҳисоблаб, натижаларни тегишли жадвалга ёзиш керак.

1-мисол. $y=x^3-3x^2$ функциянинг монотонлик ораликларини ва экстремумларини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси — бутун Ox ўқи бўлиб, унинг ҳосиласи $y'=3x(x-2)$.

Ҳосилани нолга тенглаштириб, критик нукталарни топамиз: $x_1=0$ ва $x_2=2$. Ox ўқи бу нукталар билан учта ораликка бўлинади: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ ва $(2; +\infty)$.

Бу ораликларда ҳосиланинг ишорасини текшириб, натижаларни қуйидаги жадвалга ёзамиз:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	—	0	+
y		max 0		min -4	

$$y_{\max}=f(0)=0^3-3\cdot 0^2=0; \quad y_{\min}=f(2)=2^3-3\cdot 2^2=-4.$$

4.1.3. $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўзининг энг кичик ($m=y_{\text{э. кич}}$) ёки энг катта ($M=y_{\text{э. кат}}$) кийматларига (a, b) ораликда ётувчи критик нукталарида ёки $[a, b]$ кесманинг охирларида эришади.

2-мисол. $y=x^4-2x^2+3$ функциянинг $[-3; 2]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта кийматларини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг ҳосиласи: $y'=4(x^3-x)$. $y'=0$ шартдан $x_1=0$, $x_2=1$ ва $x_3=-1$.

Критик нукталарнинг ҳаммаси ($-3; 2$) ораликка тегишли. Берилган функциянинг бу нукталардаги ва кесманинг охирларидаги кийматларини ҳисоблаймиз:

$$y(0)=3, y(1)=2, y(-1)=2, y(-3)=66, y(2)=11.$$

Шундай қилиб, $[-3; 2]$ кесмада $y_{\text{э. кат}}=66$, $y_{\text{э. кич}}=2$.

1-дарсхона топшириғи

1. Функцияларнинг монотонлик ораликларини топинг:

а) $y=2-3x+x^3$; б) $y=x(1+\sqrt{x})$;

в) $y=x-2\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

Ж: а) $(-\infty, -1)$ ва $(1, +\infty)$ да ўсади, $(-1, 1)$ да камаёди;

б) $[0, +\infty)$ да ўсувчи;

в) $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ да ўсувчи; $(0, \frac{\pi}{3})$ ва $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$ да камаювчи.

2. Функциянинг экстремумларини топинг:

а) $y=\frac{x^2}{x-2}$; б) $y=x+\frac{1}{x}$; в) $y=\frac{\ln x}{x}$.

Ж: а) $x=0$ да $y_{\max}=0$; $x=4$ да $y_{\min}=8$;

б) $x=1$ да $y_{\min}=2$; $x=0$ да $y_{\max}=-2$;

в) $x=e$ да $y_{\max}=\frac{1}{e}$.

3. Ушбу

а) $y=\frac{x-1}{x+1}$ функциянинг $[0, 4]$ қесмадаги;

б) $y=\arctg \frac{1-x}{1+x}$ функциянинг $[0, 1]$ кесмадаги энг кичик ва энг

катта кийматларини топинг.

Ж: а) $M=0,6$, $m=-1$; б) $M=\frac{\pi}{4}$, $m=0$.

1-мустақил иш

1. Функцияларнинг монотонлик ораликлари ва экстремум нукталарини топинг:

а) $y=x\sqrt{1-x^2}$; б) $y=x-2\ln x$; в) $y=\ln x-\arctg x$.

Ж: а) $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ да камаювчи; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ да ўсади; $y_{\min}=y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y_{\max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$;

б) $(0, 2)$ да камаювчи; $(2, +\infty)$ да ўсувчи; $y_{\min}=y(2)=2(1-\ln 2)\approx 0.61$;

в) $(0, +\infty)$ да ўсувчи.

2. Ушбу

а) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ нинг $[0, 1]$ кесмадаги;

б) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$ нинг $[0, 1]$ кесмадаги;

в) $y=x+2\sqrt{x}$ нинг $[0, 4]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг:

Ж: а) $y_{\max}=1$, $y_{\min}=0.6$;

б) $y_{\max}=2$, $y_{\min}=\sqrt[3]{2}$;

в) $y_{\max}=8$, $y_{\min}=0$.

2- §. Функциянинг кавариклиги ва ботиклиги.

Эгилиш нукталари. Асимптоталар

4.2.1. $y=f(x)$ функциянинг графиги (a, b) ораликнинг исталган нуктасида ўтказилган уринмадан *пастда* ётса, у ҳолда функция графиги *қаварик* дейилади.

$y=f(x)$ функциянинг графиги (a, b) ораликнинг исталган нуктасида ўтказилган уринмадан *юқорида* ётса, у ҳолда функция графиги *ботик* дейилади.

Функция графигининг каварик қисмини ботик қисмидан ажратувчи $M_0(x_0, f(x_0))$ нукта графикнинг эгилиш нуктаси дейилади.

Функция графигининг каварик ёки ботик бўлишининг етарлилик шартлари. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи манфий, яъни $f''(x)<0$ бўлса, у ҳолда бу ораликда функция графиги каварик бўлади.

Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мусбат, яъни $f''(x)>0$ бўлса, у ҳолда бу ораликда функция графиги ботик бўлади.

Кавариклик оралиғини ботиклик оралиғидан ажратиб турувчи эгилиш нуктасидан ўтишда функциянинг иккинчи тартибли ҳосила-

си ишорасини ўзгартиради. Бундай нукталарда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи ё нолга тенг, ёки мавжуд бўлмайди.

$f''(x)=0$ ёки $f''(x)$ мавжуд бўлмайдиган нукталар *иккинчи тур критик нукталар* дейилади.

Эгилиш нукталари мавжуд бўлишининг етарлилик шарти. Агар x_0 нукта $y=f(x)$ функция учун иккинчи тур критик нукта бўлса ва $f''(x)$ иккинчи тартибли ҳосила бу нуктадан ўтишда ишорасини ўзгартирса, у ҳолда бу функция графигининг x_0 абсциссали нуктаси эгилиш нуктаси бўлади.

Демак, функция графигининг кавариклик ва ботиклик ораликларини, эгилиш нукталарини топиш учун олдин функция аниқланиш соҳасини иккинчи тур критик нукталар билан ораликларга бўлиш ва бу ораликларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириш керак. Шундан кейин етарлилик шартларидан фойдаланиб, кавариклик, ботиклик ораликлари ва эгилиш нукталари аниқланади.

1-мисол. $y=xe^x$ функциянинг кавариклик, ботиклик ораликларини ва эгилиш нукталарини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси бутун Ox ўқдан иборат. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = e^x(1+x); \quad y'' = e^x(2+x).$$

Иккинчи тартибли ҳосилани нолга тенглаштириб, иккинчи тур критик нуктани топамиз: $x=-2$. Ox ўқ бу нукта билан иккита ораликка бўлинади: $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$.

Бу ораликларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириб, ушбу жадвални тузамиз:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y		$-2e^{-2}$	

$x=-2$ да графикда ординатаси $y=-2e^{-2}$ бўлган эгилиш нуктасига эга бўламиз.

4.2.2. Агар $y=f(x)$ функция графигидаги нукта шу график бўйлаб чексиз узоклашганда ундан бирор тўғри чизиккача бўлган масофа нолга интилса, бу тўғри чизик $y=f(x)$ функция графигининг *асимптотаси* деб аталади.

Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ бўлса, $x=a$ тўғри чизик $y=f(x)$ функция графигининг *вертикал асимптотаси* дейилади.

Агар

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ва } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

ёки

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ва } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$$

лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизик $y = f(x)$ функциянинг *оғма асимптотаси* дейилади.

Хусусан, $k=0$ да *горизонтал асимптотага* эга бўламиз.

2- м и с о л. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ функциянинг асимптоталарини топинг.

Е ч и ш. $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$ бўлгани учун $x = -2$ вертикал асимптота бўлади. Оғма асимптоталарни топамиз:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = -4. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, оғма асимптотанинг тенгламаси $y = x - 4$ кўри-нишга эга.

2- дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги функцияларнинг кавариклик, ботиклик ораликларини ва эгилиш нукталарини топинг:

а) $y = x^5 + 5x - 6$; б) $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$; в) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ж: а) $(-\infty, 0)$ да каварик; $(0, +\infty)$ да ботик; эгилиш нуктаси: $M_0(0, 6)$;

б) $(-\infty, 4)$ да ботик; $(4, +\infty)$ да каварик; эгилиш нуктаси: $M_0(4, 20)$;

в) $(-\infty, -1)$ ва $(1, +\infty)$ да ботик; $(-1, 1)$ да каварик; эгилиш нукталари: $M_1(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ ва $M_2(1, e^{-\frac{1}{2}})$.

2. Қуйидаги функцияларнинг асимптоталарини топинг:

а) $y = \sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$; б) $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$; в) $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$.

Ж: а) $x = 2$ ва $y = 1$;

б) $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ ($x \rightarrow +\infty$ да) ва $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ ($x \rightarrow -\infty$ да);

в) $x = 0$, $y = 2x$, $x = -1$ ($x \rightarrow -1 + 0$ да).